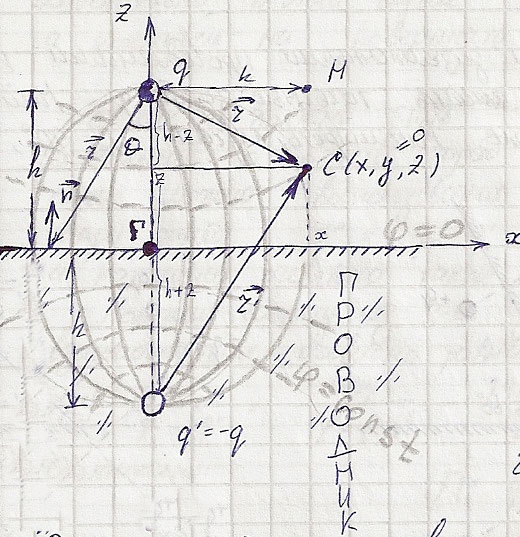
**Задача**. Над проводящей бесконечной плоскостью проводника находится точечный заряд . Найти поверхностную плотность зарядов, индуцированных зарядом на поверхности проводника и напряженность поля в точках и .

**Решение**. Рассматриваемый случай является простейшей моделью для применения метода электростатических изображений. Метод базируется на утверждении, что поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью, т.е. всюду на поверхности потенциал одинаков. Идея метода состоит в том, чтобы подбором дополнительных фиктивных зарядов получить поле, в котором эквипотенциальная поверхность совпадет с поверхностью проводника. В теории метод обосновывается и доказывается, что полученное решение задачи будет единственным.



Итак, разметим заряд под проводящей поверхностью на том же расстоянии от нее, что и исходный заряд. Суммарный потенциал системы зарядов

Очевидно, при он равен нулю. Это как раз наша плоскость. Теперь мы не принимаем во внимание проводник и работаем только с нашими зарядами.

Поле на поверхности проводника найдется по теореме Гаусса . Оно равно

Учитывая, что на поверхности проводника (рис), напишем

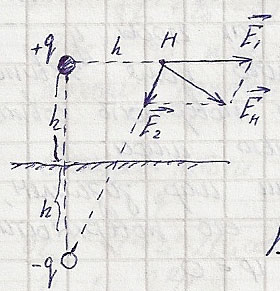
Из рисунка видно, что

Поэтому

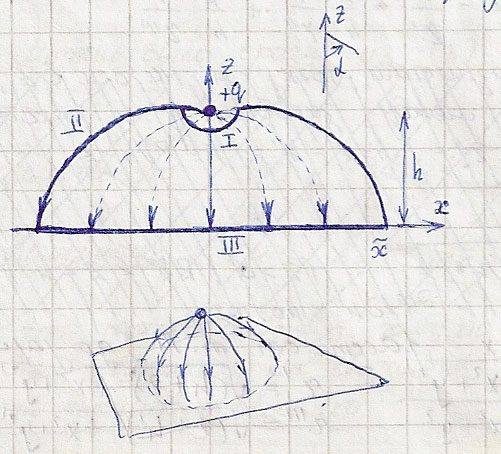
На поверхности проводника , ,

В точке :

В точке :



**Задача[4]**. На высоте над поверхностью бесконечной металлической пластины находится точечный заряд. Одна из силовых линий этого заряда оканчивается на поверхности пластины на расстоянии от точки, над которой размещен заряд . Определить, под каким углом к горизонту силовая линия выходит из заряда.

**Решение**. Выделим на рисунке область интегрирования для интеграла Гаусса. Пусть III – поверхность проводника, II – поверхность, которая получается вращением силовой линии вокруг оси , I – часть сферической поверхности с центром в точке нахождения заряда (рис).

Итак

Получим значения интегралов.

где – телесный угол. Очевидно

Для того чтобы найти третий интеграл, нам нужно знать поле на поверхности проводящей плоскости. Его мы вычисляли ранее.

где – нормаль к поверхности проводника. Заметим, что для третьей поверхности и тогда

Получаем, что

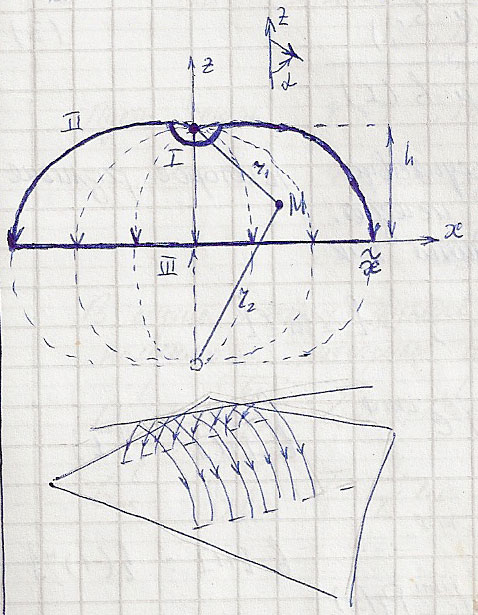
или

Это означает, что силовая линия выходит под прямым углом. Однако мы в ходе решения задачи получили более общий результат:

где – координата падения силовой линии.

**Задача[4]**. Над бесконечной заряженной плоскостью проходит параллельно ей на расстоянии заряженный провод. На каком расстоянии от него падают силовые линии на поверхность, если они разлетаются в горизонтальном направлении друг от друга.

**Решение**. Задачу решаем так же, как и для случая точечного заряда. Для этого нам понадобиться значение поля на поверхности плоского проводника.



Потенциал тонкого провода нам известен

На поверхности проводника он найдется методом изображений:

Ввиду симметрии задачи можем положить , тогда

Выделяем соответствующую поверхность. Для нее

где – плоскости оснований, а остальные указаны на рисунке. Очевидно,

Вычисляем остальные интегралы .

Для вычисления интеграла введем угол , отсчитываемый от оси . Его нулевое значение это направление от провода в точку . Тогда и

Итак,

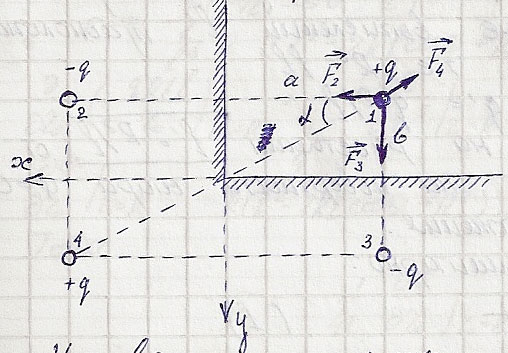
Или

В частности, в условии задачи линии разлетаются горизонтально. Это значит, что или что

Т.е. линии разлетаются на расстояние друг от друга.

**Задача**. Найти силу, действующую на заряд, находящийся между двумя проводящими плоскостями, расположенными под углом 90 градусов.

**Решение**. Применение метода электростатических изображений ясно из рисунка. Не трудно убедиться в том, что система зарядов образует на поверхности проводников нулевой (постоянный) потенциал. Задача свелась к простой геометрии.



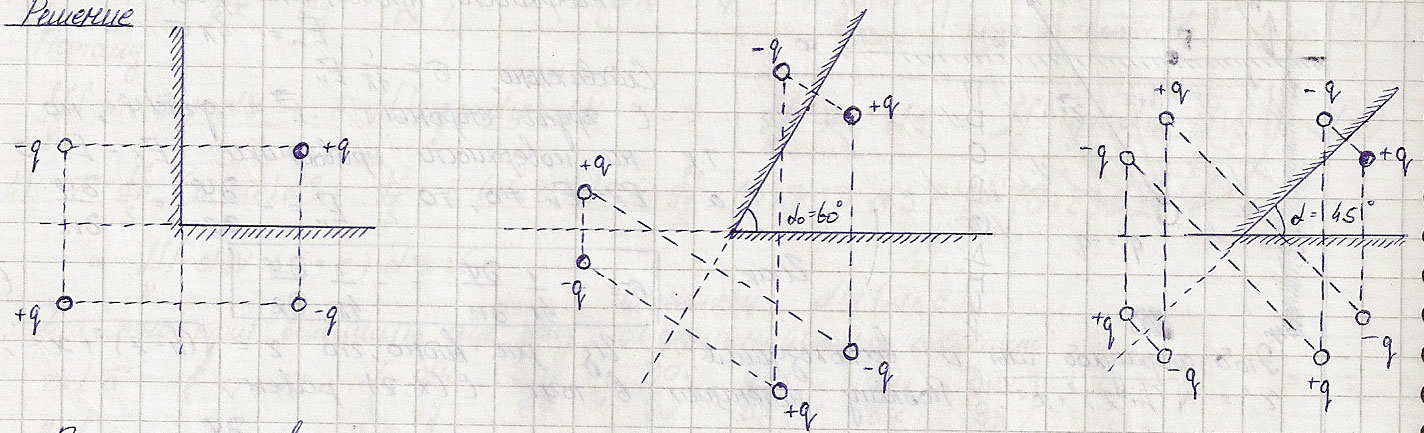
В проекциях:

Нетрудно получить, что

В частности, если (биссектриса)

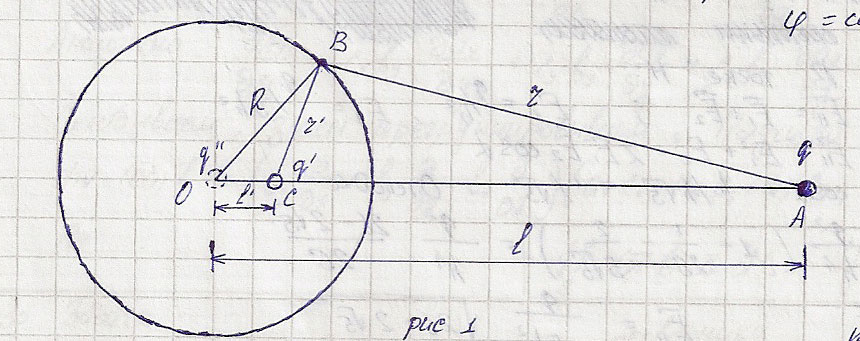
**Задача**. Двугранный угол между заземленными проводящими плоскостями равен . Внутри угла находится точечный заряд . Для случаев показать, как разместятся фиктивные заряды для применения метода электростатического изображения.

**Решение**.



**Задача**. Определить силу притяжения между точечным зарядом и металлическим шаром. Заряд находится на расстоянии от центра шара. Рассмотреть два случая: 1) шар заземлен, 2) шар изолирован, а полный его заряд равен нулю.

**Решение**. Решаем задачу методом изображений. Выясним, какой фиктивный заряд нужно разместить внутри сферы, чтобы на ее поверхности получить равный потенциал.



1. Шар заземлен. На его поверхности . На расстоянии от центра сферы поместим фиктивный заряд . Тогда

Предположив, что , получим . Это отношение позволяет варьировать выбор расстояния . В частности, предположим, что треугольники OBC и OAB подобны (рис). Тогда или . В этом случае

Отметим также, что так что

Итак, поместив заряд на расстоянии от центра сферы, мы получим эквипотенциальную поверхность, совпадающую с поверхностью шара.

Сила притяжения найдется теперь элементарно

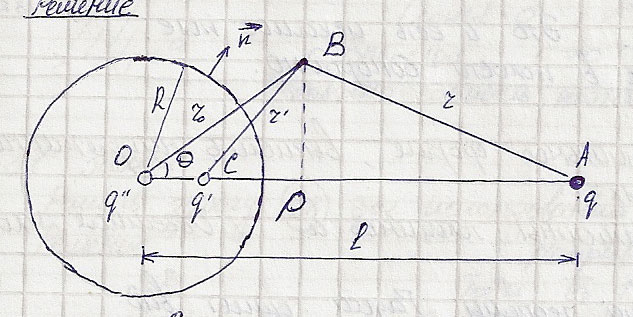
2. Шар изолирован. Изоляция шара означает, что он не получает и не отдает заряды. Под действием заряда заряды на поверхности шара перераспределяются, но полный заряд остается равным нулю. В таком случае, заряд , полученный в предыдущей задаче, с обратным знаком достаточно расположить в центре шара. Назовем его . Действительно, полный заряд шара тогда равен нулю, а потенциал на поверхности шара создается только этим зарядом (от других зарядов он равен нулю по построению) и равен .

Сила взаимодействия

Замечание. А что если заряд сферы не равен нулю, а имеет значение ? Как нетрудно догадаться, в этом случае в центре сферы нужно поместить заряд .

**Задача**. Точечный заряд находится на расстоянии от изолированного металлического шара с нулевым зарядом. Найти поверхностную плотность заряда, индуцированного на его поверхности.

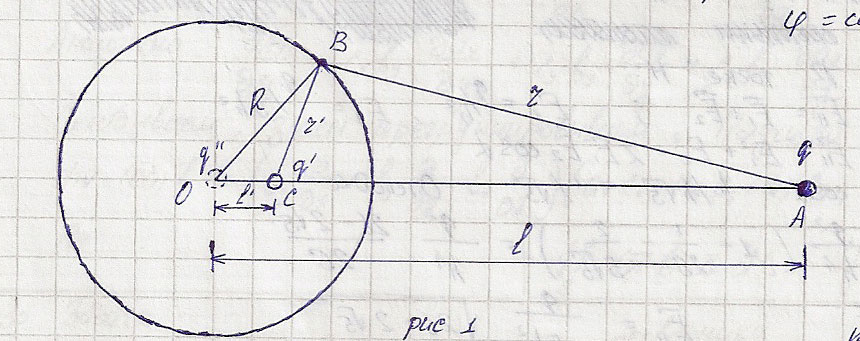
**Решение**. Метод решения подробно обсуждался в предыдущей задаче. Рассмотрим точку вне сферы. Потенциал в этой точке



Поскольку поле нормально к поверхности проводника, можем написать

Подставив, получаем

**\*\*Задача**. Определить дипольный момент изолированной незаряженной сферы в однородном электрическом поле .

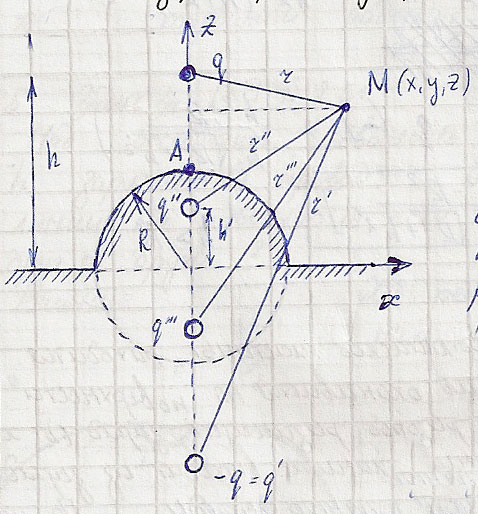
**Решение**. Для решения задачи прибегнем к искусственному приему, подобно тому, как это было проделано в предыдущих задачах. Вернемся к рисунку предыдущей задачи. Предположим, шар поляризован под воздействием поля точечного заряда . Это поле неоднородное, но если мысленно заряд переносить в бесконечность поле вокруг шара будет однородным.

Пусть поле заряда в центре сферы равно . Удалять заряд будем с условием, что поле не изменится. Поляризационные заряды создают такое же поле, что и диполь длины . Вспомним, что , , . Если заряд положительный, то отрицательный и диполь направлен от заряда по полю.

Окончательно

**\*\*Задача[6№155]**. Заряженная проводящая плоскость имеет выступ в форме полусферы радиуса . Центр сферы лежит на плоскости. На оси симметрии системы, на расстоянии от плоскости находится точечный заряд . Используя метод изображений, найти поле , а также заряд , индуцированный на выступе.

**Решение**. Последовательно размещаем заряды. Если бы выступа не было, то заряд компенсировался бы зарядом , размещенный симметрично плоскости. Если бы была только сфера, то поверхность равного потенциала создавалась бы зарядом . Расположив заряд , можно увидеть, что искажение от его поля нужно компенсировать зарядом .



Потенциал в точке :

Из рисунка видим, что

Подставим значения в потенциал:

Пусть , тогда

Поскольку и на поверхности сферы

то

Сначала вычислим производную, заметив, что

Заметив, что

мы можем найти полный заряд

Замена

и простое интегрирование приводит к такому результату: